Contraste entre le Pouvoir Réel et le Pouvoir Formel d'une Correspondance de Choix Social

Dawidson Razafimahatolotra

Contraste entre le Pouvoir Réel et le Pouvoir Formel d'une Correspondance de Choix Social

Dawidson RAZAFIMAHATOLOTRA*
École d'Économie de Paris
Université Paris 1 Panthéon Sorbonne

29 juin 2009

Résumé

Une correspondance de choix social est rationalisable s'il existe un mécanisme de pouvoir qui implémente sa solution. Nous proposons dans ce travail une caractérisation de la rationalisation des solutions d'une correspondance de choix social par le coeur ou l'ensemble de marchandage selon Mas-Colell d'une fonction d'effectivité. [1]

Mots clés : Fonction d'effectivité, correspondance de choix social, rationalité.

JEL Classification : D70, D71.

AMS Classification : 91A44

*razafimahatolotra@yahoo.ca

1. Ce chapitre a été tiré du travail commun de Hans Keiding et Razafimahatolotra D.

1 Introduction

Dans une société où les objectifs des joueurs sont divergents voire opposés, la question de choix publics qui relève d'une quête de l'intérêt général ou du souci au bien collectif pose problème sur plusieurs aspects. Premièrement, la question la plus préoccupante consiste à savoir "quelles sont la nature et la forme de l'intérêt général dans une norme sociale ou dans un profil des joueurs en vigueur". La question qui s'en suit consiste à savoir comment l'implémenter : l'existence d'un mécanisme rationnel qui soit acceptable sur le plan cognitif et faisable sur le plan technique. La notion de correspondance de choix social apporte une solution en proposant que l'intérêt général soit déterminé en fonction du profil des joueurs : l'ensemble des ordres faits par les joueurs sur les alternatives, lesquelles sont fixées *à priori* comme les candidats d'une élection ou les différentes propositions discutées dans un débat de décision. En matière de choix collectif, cette procédure simplifie énormément le mécanisme de choix social car premièrement les joueurs n'ont qu'à manifester leurs préférences sur les alternatives et deuxièmement, la règle de décision est mécanique et bénéficie de la propriété de transcendance et d'objectivité ; pourvu que les parties prenantes de la société acceptent sa validité. Pourtant, ces propriétés ne sont pas suffisantes pour dire que l'issue d'une correspondance choix social est rationnelle. En effet, une correspondance de choix social est à la fois une règle de décision et un mécanisme d'attribution de pouvoir : une permission d'opposer contre une classe d'alternatives. Ainsi, un joueur ou un groupe de joueurs rationnels, qui suit la logique de sa représentation et de ce qui est faisable, ne se contenterait pas de manifester sa préférence mais agirait selon les pouvoirs qu'il possède, dans les limites de la validité de la règle de choix social supposée acceptée par tous les joueurs. Un joueur rationnel agit donc selon les pouvoirs qu'il déduit de la règle de choix social pour influencer l'issue du jeu.

Une correspondance de choix social offre à chaque joueur plusieurs possibilités pour déterminer les limites de ses pouvoirs, mais pour simplifier, nous supposons que "les choses sont égales par ailleurs" : les joueurs agissent de la même manière, ce qui serait dû à l'existence d'une norme régularisant les comportements. Comme un pouvoir en possession sans engagement n'aura aucune conséquence sur l'issue du jeu, alors le mode de déduction des pouvoirs sur la base de la correspondance de choix social n'est que le premier niveau de la rationalisation. Le deuxième niveau de rationalisation concerne alors le mode d'exercice des pouvoirs dans une situation donnée. Dans ce travail, nous étudions deux modes d'implication des joueurs dans le processus de détermination de l'issue du jeu : le premier, connu sous le nom de coeur, consiste à exclure les alternatives opposées par un groupe de joueurs alors que le second, connu sous le nom de marchandage, consiste à n'exclure que les alternatives opposées sans contestation.

Nous donnons dans ce travail des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une correspondance de choix social soit rationalisable selon le coeur d'une fonction d'effectivité. Nous donnons également des conditions nécessaires pour la rationalisation par rapport au marchandage de Mas-Colell. À la fin de ce chapitre, nous proposons *un indice de contestabilité* d'une règle de vote, un indicateur pour évaluer la probabilité de contre une issue sociale sélectionnée par la règle.

2 Le modèle

Par convention, nous prenons comme hypothèse qu'un *joueur*, noté par i représente soit un individu, soit un groupe d'individu ou alors une institution. Le terme institution est à interpréter au sens organique et par conséquent, pas nécessairement selon une visée politique ou juridictionnelle. Nous proposons qu'*une société* puisse être évoquée comme un ensemble de n joueurs $N = \{1, \ldots, n\}$. *Une coalition* est un ensemble non vide de joueurs $S \subset N$ et on note $\mathcal{P}_0(N)$ l'ensemble des coalitions de N. *L'ensemble des alternatives*, noté $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$ regroupe tous les états possibles de la société.

La règle du choix collectif est organisée selon la procédure suivante : la société se donne des ensembles de notation Y, $k = 1 \ldots \varphi$ $(|Y| \leq m)$, puis chaque joueur associe à chaque $x \in A$ un point dans Y. Les points donnés par les joueurs seront transformés par une règle, identifiée *à priori* par la société, en critère de choix social. Formellement, à chaque $i \in N$, on peut associer une application $w^i : A \longrightarrow Y$, qui sera appelée par la suite *préférence* de i sur A. L'ensemble de préférences sur A est noté par $\mathcal{L}(A, Y)$ et tout simplement $\mathcal{L}(A)$ si Y est isomorphe à $\{1, \ldots, m\}$. Dans ce cas, nous utilisons la notation R^N au lieu de u^N. Pour une coalition $S = \{i_1, \ldots, i_s\}$, un $S-$profil est un élément de $\mathcal{L}(A, Y)^S$. Une *correspondance de choix social*, qui définit la règle du choix collectif est une correspondance $H : \mathcal{L}(A, Y)^N \longrightarrow \mathcal{P}(A)$. Les éléments de $H(u^N)$ sont appelés *les issues sociales retenues* dans la règle H. D'habitude, l'espace d'arrivé d'une correspondance de choix social ne contient pas l'ensemble vide, mais ce qui nous intéresse dans ce travail ne concerne par la non vacuité de $H(u^N)$ mais de ses propriétés, alors nous tenons en compte dans cette étude le fait que $H(u^N)$ peut être vide pour un $u^N \in \mathcal{L}(A, Y)^N$.

Un mécanisme est une fonction $E : \mathcal{P}_0(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, dite fonction d'effectivité, tel que $E(\emptyset) = \emptyset$, $E(N) = \mathcal{P}_0(A)$, $\emptyset \notin E(S)$ et $A \in E(S)$, $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$. La correspondance H est rationalisable s'il existe un mode de sélection de solution $\mathcal{S} : E \mapsto \mathcal{S}(E, .)$ tel que pour tout $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$,

$\mathcal{S}(E, R^N) = H(R^N)$. Dans ce travail, nous considérons seulement le coeur d'une fonction d'effectivité, noté $\mathcal{C}(E, .)$ et l'ensemble de marchandage de Mas-Colell, noté $\mathcal{M}(E, .)$. A cet effet, rappelons qu'une *objection* contre une alternative $x \in A$ dans un profil $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ est une paire (S, B) satisfaisant

$$B \in E(S) \text{ et } \forall y \in B, \forall i \in S \ : y \ R^i \ x$$

Une *contre-objection* selon Mas-Colell contre (S, B) est une paire (T, C) telle que si u^N est la fonction d'utilité qui représente R^N,

$$C \in E(T) \text{ et } u^T(C) > (u^{T \setminus S}(x), u^{T \cap S}(B))$$

Une objection sans contre objection est dite justifiée. Ainsi

$$\mathcal{C}(R, R^N) = \{x \in A \mid \text{ sans objection contre } \ x\}$$
$$\mathcal{M}(E, R^N) = \{x \in A \mid \text{ sans objection justifiée contre } x\}$$

Pour un nombre réel x, notons $\lceil x \rceil = \min \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$ et $\lfloor x \rfloor = \max \{n \in \mathbb{N} \mid x \leq n\}$.

3 Choix social et mécanisme du pouvoir

Généralités

Dans ce paragraphe, nous admettons que pour tout $i \in N$, R^i est une bijection de A dans Y. Dans ce cas, nous notons $\mathcal{L}(A)$ l'ensemble des préférences sur A.

Soit $H : \mathcal{L}(A)^N \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ une correspondance de choix social. On dit que Q^N est déduit de R^N par une amélioration de x si pour tout $i \in N$ et pour tout $y \in A : x \ R^i \ y \Rightarrow x \ Q^i \ y$. Notons

$$R^N(x) = \left\{Q^N \mid \ Q^N \ \text{ est déduit de } R^N \text{ par une amélioration de } \ x\right\}$$

Paretienneté. Nous disons que H satisfait la condition de Pareto si $x \ R^i \ y, \ \forall i \in N$ entraîne $y \notin H(R^N)$.

Maskin monotonie. Nous disons que H est Maskin monotone si pour tout $x \in H(R^N)$ et pour tout $Q^N \in R^N(x)$, $x \in H(Q^N)$.

Antimonotonie. Nous disons que H est antimonotone si pour tout $y \notin H(R^N)$, pour tout $x \neq y$ et pour tout $Q^N \in R^N(x)$, $y \notin H(Q^N)$.

Détermination. Nous disons que H satisfait la détermination si pour tout $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$, pour tout $y \notin H(R^N)$, alors il existe $S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \supset \left\{x \mid x \ R^S \ y\right\}$ tels que

$$\forall Q^S \in \mathcal{L}(A)^S : [B \ Q^S \ y \ Q^S \ (A \setminus (B \cup \{y\}))] \Rightarrow [y \notin H(Q^S, R^{N \setminus S})] \quad (1)$$

Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité. Alors :

Régularité. Nous disons que E est régulière si $\forall S_1, S_2 \in \mathcal{P}_0(N)$ et $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{P}_0(A)$: $B_k \in E(S_k)$ $(k = 1,2)$ entraîne $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ ou $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.

Maximalité. Nous disons que E est maximale si $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $\forall B \in \mathcal{P}_0(A)$: $B \notin E(S)$ entraîne $A \setminus B \in E(N \setminus S)$.

Proposition 3.1. *Soit $H : \mathcal{L}(A)^N \longrightarrow \mathcal{P}_0(A)$ une correspondance de choix social satisfaisant l'antimonotonie. Alors, H est Maskin monotone.*

Preuve : Soient $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ et $x \in H(R^N)$. Admettons que H n'est pas Maskin monotone et soit $Q^N \in R^N(x)$ tel que $x \notin H(Q^N)$. Comme $Q^N \in R^N(x)$, alors il existe une suite $z_1, \ldots, z_r \in A \setminus \{x\}$ et une suite $Q_1^N, \ldots, Q_r^N \in \mathcal{L}(A)^N$ telles que $Q_{k+1}^N \in Q_k^N(z_k)$ et $R^N \in Q^N(z_r)$. Comme H est antimonotone, alors $x \notin H(Q^N)$ entraîne $x \notin H(Q_k^N)$ $(k = 1 \ldots r)$ et en particulier $x \notin H(R^N)$. Ce qui est absurde.

□

Pour chaque correspondance de choix social H, on peut associer une répartition de pouvoir E^H tel que $B \in E^H(S)$ signifie que dans la règle H, la coalition S a le pouvoir de bloquer toutes les alternatives en dehors de B. Le choix de E^H dépend de l'interprétation et du modèle que l'on fait du mode d'acquisition de pouvoir des joueurs. Dans tous les cas, les préférences sont les seuls moyens d'action pour la garantie du pouvoir. Dans ce travail, nous étudions les trois type de garanties de pouvoir E_α^H, E_β^H et E_κ^H définis comme suit :

$$E_\alpha^H(S) = \big\{B \mid \exists R^S \text{ tel que } \forall Q^{N\setminus S},\ H(R^S, Q^{N\setminus S}) \in B\big\}\ ;$$
$$E_\beta^H(S) = \big\{B \mid \forall Q^{N\setminus S}\ \exists R^S \text{ tel que },\ H(R^S, Q^{N\setminus S}) \in B\big\}\ ;$$
$$E_\kappa^H(S) = \big\{B \mid \forall R^N \in \mathcal{L}(A)^N,\ y \in A \setminus B :\ [B\ R^S\ y\ R^S\ A \setminus (B \cup \{y\})] \Rightarrow y \notin H(R^N)\big\}$$

Proposition 3.2. *Soit $H : \mathcal{L}(A)^N \longrightarrow \mathcal{P}_0(A)$ une correspondance de choix social. Alors, E_α^H et E_β^H sont des fonctions d'effectivité. Si H satisfait la condition de Pareto, alors E_κ^H est une fonction d'effectivité.*

Preuve : Pour E_α^H et E_β^H, voir Abdou & Keiding (3). Nous montrons que E_κ^H est une fonction d'effectivité. Il est évident que $E(\emptyset) = \emptyset$ et $A \in E(S), \forall S \in \mathcal{P}_0(N)$. De la propriété de Pareto $B\ R^N x$ implique que $y \notin H(R^N)$. Donc, $B \in E_\kappa^H(N)$, $\forall B \in \mathcal{P}_0(A)$.

□

Illustrations

Nous considérons deux exemples très connus en matière de choix social : la règle de Condorcet et la règle de Borda. La règle de Condorcet peut rien sélectionner alors que la règle de Borda arrive toujours à sélectionner au moins une alternative. Donc, cette dernière est mieux que la règle de Condorcet en matière d'absence de cycle de Condorcet. Pourtant, nous verrons que si les coalitions utilisent la stratégie β pour garantir leurs pouvoirs, la règle de Borda offre plus de pouvoir que celle de Condorcet et donc la fréquence da la vacuité du coeur de la fonction d'effectivité associée à la règle de Borda est supérieure à la fréquence de la vacuité du coeur de la fonction d'effectivité associée à la règle de Condorcet. En effet, nous avons démontré que la fréquence de la vacuité du coeur d'une fonction d'effectivité simple et anonyme est une fonction décroissante de l'ordre minimal de ses cycles (**?**).

Exemple 3.3. *Règle de Condorcet.*
Soient $N = \{1, \ldots, n\}$ *et* $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$*. On dit que* x *est dominé par* y *dans* R^N *si*

$$\#\left\{i \mid x\ R^i\ y\right\} > \#\left\{i \mid y\ R^i\ x\right\} \tag{2}$$

Dans ce cas

$$H_{_C}(R^N) = \left\{x \mid\ x \text{ n'est pas dominé dans } R^N\right\} \tag{3}$$

$\alpha-$EFFECTIVITÉ. *La répartition de pouvoir selon* α *: Stratégie prudente.*

Soient $S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \in \mathcal{P}_0(A)$. Pour qu'au moins un élément de B ne soit pas dominé, les membres de S ont intérêt à choisir un $x \in B$ tel que pour tout $y \neq x : x\ R^i\ y$. Dans ce cas,

$$\forall y \neq x : \#\left\{i \mid x\ R^i\ y\right\} \geq s$$

Donc, pour neutraliser la tentative de S à forcer l'issue x, les joueurs restants regroupés dans $N \setminus S$ doivent accorder leurs préférences pour choisir $y \neq x$ de telle sorte que $\#\{i \mid y\ R^i\ x\}$ soit maximal. Les jeux de forces entre S et $N \setminus S$ font que x soit sélectionné malgré $N \setminus S$ si et seulement si

$$s \geq n - s$$

Sachant que cette équation ne dépend pas du nombre d'alternatives dans B, alors elle donne la répartition de pouvoir suivante

$$\forall S, |S| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, E_\alpha^{H_c}(S) = \{A\} \text{ et } \forall S, |S| \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, E_\alpha^{H_c}(S) = \mathcal{P}_0(A)$$

$\beta-$EFFECTIVITÉ. *La répartition de pouvoir selon* β *: Stratégie adaptative.*

Soient $S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \in \mathcal{P}_0(A)$. Pour éviter que S puisse forcer une issue sociale dans B, les joueurs dans $N \setminus S$ doivent choisir un $y \notin B$ de telle sorte que $\#\{i \mid y\ R^i\ x\}$ soit maximal. Donc, ils doivent mettre y au top. Dans ce cas,

$$\forall x \in B : \#\left\{i \mid y\ R^i\ x\right\} \geq n - s$$

L'adaptation des membres de S à cette "hostilité" de $N \setminus S$ contre son pourvoir est d'harmoniser les préférences de ses membres pour qu'il trouve un $x \in B$ pour que $\#\{i \mid x\ R^i\ y\} \geq \#\{i \mid y\ R^i\ x\}$. En mettant x au top, cette équation se traduit par $s \geq n - s$. Par conséquent, on retrouve la distribution de pouvoir $E_\alpha^{H_C}$, i.e.

$$\forall S, |S| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, E_\beta^{H_c}(S) = \{A\} \text{ et } \forall S, |S| \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, E_\beta^{H_c}(S) = \mathcal{P}_0(A)$$

$\kappa-$EFFECTIVITÉ. *La répartition de pouvoir selon κ.*

Il n'est pas difficile de montrer que

$$E_\kappa^{H_C} = E_\alpha^{H_C} = E_\beta^{H_C}$$

Ici, la répartition du pouvoir donnée par l'une des ces fonctions d'effectivité reflètent la structure de la règle de décision. Par exemple, à un cycle de Condorcet : une suite d'alternatives $x_1, \ldots, x_p$ telle que x_1 est dominé par x_2, ..., et x_p est dominé par x_1, on peut associer un cycle de fonction d'effectivité (Définition **??**), et inversement un cycle de fonction d'effectivité donne lieu à un cycle de Condorcet. D'une autre manière, une situation d'absence de choix par la règle de Condorcet se traduit par l'existence de famille d'objections contre toutes les alternatives, et une alternative sélectionnée par la règle de Condorcet ne peut pas avoir une objection. Dans l'exemple qui suit, les cycles générés par la distribution de pouvoir ne reflètent plus le paradoxe de Condorcet. En matière d'analyse de pouvoir (15), (4), cette situation favorise l'écart entre le pouvoir formel, celui qui sera déduit de la règle de choix social, et le pouvoir réel, ce qui est déduit des stratégies des coalitions sur la base de cette règle.

Exemple 3.4. *Règle de Borda.*

Soient $N = \{1, \ldots, n\}$ et $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Pour $x \in A$, on note

$$b_i(x, R^N) = \#\left\{y \in A \mid x\ R^i\ y\right\} - \#\left\{y \in A \mid y\ R^i\ x\right\}$$

le score de x par $i \in N$ dans le profil $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$. C'est-à-dire que $b_i(x, R^N)$ compte la différence entre le nombre des y avant et x et le nombre de y après x, selon la préférence de i. Donc, si R^N désigne les rangs des alternatives, i.e pour tout $i \in N$, R^i est une bijection de A dans $\{1, \ldots, m\}$, et x est placé au rang b selon i, alors :

$$b_i(x, R^N) = m - 2b + 1 \tag{4}$$

Donc, pour tout $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ et pour tout $x \in A$

$$b_i(x, R^N) \in \{m-1, \ldots, m-2b+1, \ldots, -m+1\}$$

Le *score de Borda de* x dans R^N est défini par le nombre :

$$b(x, R^N) = \sum_{i \in N} b_i(x, R^N), \tag{5}$$

$$H_{_B}(R^N) = \big\{x \in A \mid b(x, R^N) \geq b(y, R^N),\ \forall y \in A\big\}$$

$\alpha-$EFFECTIVITÉ. *La répartition de pouvoir selon α : Stratégie prudente.*

Soient $S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \subset A$. La coalition S est effective pour que l'issue sociale soit un élément de B s'il existe $x \in B$ et un $S-$profil R^S tel que quoi que $N \setminus S$ fasse en choisissant un $N \setminus S-$profl $Q^{N \setminus S}$, nous avons

$$\forall z \neq x : b(z, R^S, Q^{N \setminus S}) \leq b(x, R^S, Q^{N \setminus S}) \tag{6}$$

Afin de garantir (de manière optimale) le pouvoir d'exclure les alternatives en dehors de B, les membres de S doivent remplir les conditions suivantes :

- Choisir $x \in B$ de telle sorte que le score $b(x, R^S, Q^{N \setminus S})$ soit aussi élevé que possible
- Anticiper la réponse des joueurs dans $N \setminus S$, qui consisteraient à mettre au premier rang l'alternative $y \in A \setminus B$ telle que

$$\forall z \in A \setminus B : \sum_{i \in S} b_i(y, R^S, Q^{N \setminus S}) \geq \sum_{i \in S} b_i(z, R^S, Q^{N \setminus S}) \tag{7}$$

  C'est-à-dire que y a obtenu le meilleur score, selon S, parmi les alternatives de $A \setminus B$.

La première condition entraîne que x est au premier rang pour $i \in S$, alors que la deuxième condition oblige aux membres de S à choisir R^S pour que le nombre suivant soit minimal

$$\max_{y \in A \setminus B} \sum_{i \in S} b(y, R^S, Q^{N \setminus S})$$

C'est-à-dire que les jeux de forces entre S et $N \setminus S$ pour que l'issue soit dans B (objectif de S, et à éviter pour $N \setminus S$) se traduisent par la structure de préférences suivantes

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & \dots & x_1 & y & \dots & y \\
B \setminus \{x_1\} & \dots & B \setminus \{x_1\} & & & \\
x_{\varphi_1(b+1)} & \dots & x_{\varphi_s(b+1)} & & & \\
\vdots & \dots & \vdots & & & \\
x_{\varphi_1(m)} & \dots & x_{\varphi_s(m)} & x_1 & \dots & x_1 \\
R^{i_1} & \dots & R^{i_s} & Q^{i_{s+1}} & \dots & Q^{i_n}
\end{array}$$

avec $S = \{i_1, \dots, i_s\}$, $N \backslash S = \{i_{s+1}, \dots, i_n\}$, $x_1 \in B$, $A \backslash B = \{x_{b+1}, \dots, x_m\}$ et y la solution de l'équation 7. Les applications $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ étant choisi pour que les scores sur S des $x_{b+1}, \dots, x_m$ soient les mêmes ou presque.

Ainsi, le pouvoir de S pour réaliser B se traduit par l'équation suivante

$$b(x, R^S, Q^{N \backslash S}) \geq b(y, R^S, Q^{N \backslash S})$$

Ce qui donne :

$$(m-1)s + (-m+1)(n-s) \geq \sum_{i \in S} b_i(y, R^S, Q^{N \backslash S}) + (m-1)(n-s) \quad (8)$$

Calcul de $\sum_{i \in S} b(y, R^S, Q^{N \backslash S})$.

Pour $s = 1$, $b(y, R^S, Q^{N \backslash S}) = m - 2b - 1$.
Dans ce cas, l'équation 8 devient :

$$(m-1)s + (-m+1)(n-s) \geq s(m-2b-1) + (m-1)(n-s) \quad (9)$$

Pour $s \geq 1$, nous avons pour tout $i \in S$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=b+1}^{m} b_i(x_k, R^S, Q^{N \backslash S}) &= \sum_{k=b+1}^{m} m - 2k + 1 \\
&= (m-b)(m+1) - 2\frac{(m+b+1)(m-b)}{2} \\
&= -b(m-b)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\sum_{k=b+1}^{m} \sum_{i \in S} b(x_k, R^S, Q^{N \backslash S}) = \sum_{i \in S} \sum_{k=b+1}^{m} b(x_k, R^S, Q^{N \backslash S}) = -bs(m-b)$$

Cela permet de construire les applications $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ pour que les scores sur S des x_k $(k = b+1, \dots m)$ soient les mêmes. Dans ce cas, l'équation 8 devient

$$(m-1)s + (-m+1)(n-s) \geq -sb + (m-1)(n-s) \quad (10)$$

Donc
$$b \geq b_\alpha(s) = \left\lceil \frac{2n}{s}(m-1) \right\rceil - 3(m-1)$$

De l'équation 10, une coalition de taille s n'a aucune pouvoir, i.e. $B \in E(S) \Rightarrow b \geq m$, si et seulement si $s \leq 2n\frac{m-1}{4m-3}$. De même, une coalition de taille s a le plein pouvoir si et seulement si $s \geq 2n\frac{m-1}{3m-4}$, en particulier pour $s \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Ainsi, les pouvoirs selon la stratégie α sont donnés par

$$\begin{cases} \forall S, |S| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & E_\alpha^{H_B}(S) = \{A\}\,; \\ \forall S, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq |S| \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil & B \in E_\alpha^{H_B}(S) \Leftrightarrow b \geq b_\alpha(s); \\ \forall, |S| \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil & E_\alpha^{H_B}(S) = \{A\}\,. \end{cases}$$

$\beta-$ EFFECTIVITÉ. *La répartition de pouvoir selon β : stratégie adaptative.*

Soient $S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \in \mathcal{P}_0(A)$. Admettons que la coalition S a pour objectif de mettre l'issue sociale dans B alors que $N \setminus S$ s'efforce d'obtenir une issue en dehors de B. Comme $N \setminus S$ agit en premier, alors la coalition $N \setminus S$ est effective pour $y \in A \setminus B$ si elle remplie les deux conditions citées dans $\alpha-$effectivité ci-dessus, ce qui sont traduites en

$$\begin{array}{ll} (a)\ \forall i \in N \setminus S, \forall y \notin B : & y\ R^i\ x, \forall x \in B \\ (b)\ \forall Q'^{N\setminus S} \in \mathcal{L}(A)^{N\setminus S} : & \max\left\{b(x, Q^{N\setminus S}) \mid x \in B\right\} \leq \max\left\{b(x, Q'^{N\setminus S}) \mid x \in B\right\} \end{array}$$

Or, la condition (a) entraîne que

$$\begin{aligned} \sum_{x\in B}\sum_{i\in N\setminus S} b_i(x, Q^{N\setminus S}) &= (n-s)[(2b-1-m)+\cdots+(1-m)]; \\ &= b(n-s)(b-m) \end{aligned}$$

La condition (b) est équivalente à la résolution d'un problème de type : $\min_{x\in B}\max_{y\in A}\zeta(x,y)$ sous la contrainte $\sum_{x\in B}\sum_{y\in A}\zeta(x,y)$ est une constante. Le minimum est atteint si

$$\sum_{i\in N\setminus S} b_i(x, Q^{N\setminus S}) = (n-s)(b-m),\ \forall x \in B \tag{11}$$

Après le choix de $N \setminus S$ d'un profil satisfaisant 11, la meilleure réponse de S peut être traduite par

$$\forall R'^S \in \mathcal{L}(A)^S : \max_{x\in B}\ b(x, R^S, Q^{N\setminus S}) \geq \max_{x\in B}\ b(x, R'^S, Q^{N\setminus S})$$

Dans ce cas,

$$\max_{x\in B}\ b(x, R^S, Q^{N\setminus S}) = s(m-1) + (n-s)(b-m) \tag{12}$$

Comme

$$\max_{y \notin B} b(y, R^S, Q^{N\setminus S}) = (n-s)(m-1) + s(1-m) \tag{13}$$

Alors une coalition de taille s a le pouvoir de bloquer $(m-b)$ alternatives si nous avons Eq.12$\geq$ Eq.13. Ce qui donne :

$$-(n-s)(m-b) + s(m-1) \geq (n-s)(m-1) + s(1-m) \tag{14}$$

C'est-à-dire qu'une coalition de taille s a le pouvoir de forcer une issue sociale dans B si

$$b \geq b_\beta(s) = (2m-1) - \left\lfloor \frac{2s}{n-s}(m-1) \right\rfloor \tag{15}$$

De l'équation 14, une coalition de taille s n'a aucun pouvoir, $B \in E(S) \Rightarrow b \geq m$, si et seulement si $s \leq \frac{n}{3}$. De même, une coalition de taille s a le plein pouvoir si et seulement si $s \geq \frac{n}{2}$, en particulier pour $s \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Ainsi, les pouvoirs selon la stratégie β sont donnés par

$$\begin{cases} \forall S, |S| \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor & E_\alpha^{H_B}(S) = \{A\}\,; \\ \forall S, \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1 \leq |S| \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 & B \in E_\beta^{H_B}(S) \Leftrightarrow b \geq b_\beta(s); \\ \forall S, |S| \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil & E_\beta^{H_B}(S) = \{A\}\,. \end{cases}$$

$\kappa-$ EFFECTIVITÉ. *La répartition de pouvoir selon κ.*

Soient $S \in \mathcal{P}_0(N)$, $B \subset A$, $y \in A \setminus B$. Pour que S soit effectif pour bloquer l'issue y via B, il faut que les préférences des joueurs de S répondent aux stratégies de $N \setminus S$, une coalition qui a intérêt à

- minimiser les scores des alternatives de B.
- maximiser le score de y pour que celui-ci soit supérieur au meilleur score des éléments de B

Donc, les joueurs de S devront choisir un $x \in B$ comme la meilleure alterative. Dans ce cas, les jeux de force entre S et $N \setminus S$ sont déterminés par l'équation $b(x, R^S, Q^{N\setminus S}) \geq b(y, R^S, Q^{N\setminus S})$, ce qui se traduit par :

$$s(m-1) + (n-s)(-m+1) \geq s(m-2b-1) + (n-s)(m-1)$$

Ce qui donne :

$$b \geq b_\kappa(s) = \left\lceil \frac{2n}{s}(m-1) \right\rceil - 2(m-1)$$

Donc, une coalition de taille s n'a aucun pouvoir si et seulement si $s \leq 2n\frac{m-1}{3m-2}$, et elle a le plein pouvoir si et seulement si $s \geq 2n\frac{m-1}{2m-1}$, donc $s \geq n$.

C'est-à-dire que seule la coalition N a le plein pouvoir. Par conséquent, la distribution des pouvoirs selon κ est donnée par

$$\begin{cases} \forall S, |S| \leq \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor & E_{\kappa}^{H_B}(S) = \{A\} \ ; \\ \forall S, |S| \geq \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil & B \in E_{\kappa}^{H_B} \Leftrightarrow b \geq b_{\kappa}(s). \end{cases}$$

Remarque. *On peut vérifier que* $\forall S \in \mathcal{P}_0(A)$, $E_{\kappa}^{H_B}(S) \subset E_{\alpha}^{H_B}(S)$, *ce qui sera démontré dans le cas général dans la proposition 3.5 suivante.*

Si tous les joueurs agissent de manière β, H_B offre plus de pouvoir que H_C. En particulier, pour n pair $E_{\beta}^{H_B}$ n'est pas régulier, donc possède un cycle de longueur 2, alors que pour n pair, il possède un cycle de longueur 3. Par contre, si les joueurs agissent de manière α ou κ, H_B n'offre que des pouvoirs très limités, moins que proportionnel proportionnel ($\leq \left\lceil \frac{n}{s} m \right\rceil - 1$). C'est-à-dire qu'ils sont coeur-stables (Théorème de H .Moulin (**?**)).

D'une manière générale, ces distributions de pouvoir satisfont les propriétés suivantes.

Proposition 3.5. *Soit* $H : \mathcal{L}(A)^N \longrightarrow \mathcal{P}_0(A)$ *une correspondance de choix social. Alors :*

a) $\forall S \in \mathcal{P}_0(N) : E_{\kappa}^H(S) \subset E_{\alpha}^H(S)$ *;*

b) E_{κ}^H *et* E_{α}^H *sont réguliers ;*

c) E_{β}^H *est maximale ;*

d) *Si* E_{κ}^H *est maximal, alors* $\forall S \in \mathcal{P}_0(N) : E_{\beta}^H(S) = E_{\kappa}^H(S)$.

Preuve :

a) Soient $S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \in E_{\kappa}^H(S)$. Si $B = A$, alors $B \in E_{\alpha}^H$. Supposons que $B \subsetneq A$, et soit $x \notin B$. Soit $R^S \in \mathcal{L}(A)^S$ tel que $B\ R^S\ x\ R^S\ [A \setminus B \cup \{x\}]$ et choisissons $R^{N \setminus S}$ arbitraire. De la définition de E_{κ}^H, nous obtenons $x \notin H$. S'il existe $y \notin B$ tel que $y \in H(R^N)$, alors nous considérons le S profil Q^S tel que pour chaque $i \in S$, Q^i est déduit de R^i par une amélioration de la position de y pour avoir

$$\forall i \in S : B\ Q^i\ y\ Q^i\ [A \setminus (B \cup \{y\})]$$

C'est-à-dire que

$$y \notin H(Q^S, R^{N \setminus S}) \tag{16}$$

Comme H est Maskin monotone (Lemme 3.1), alors $y \in H(R^N)$ implique $y \in H(Q^S, R^{N \setminus S})$. Ce qui est en contradiction avec l'équation 16 Par conséquent, $H(R^N) \subset B$, et comme $R^{N \setminus S}$ a été choisi arbitrairement, alors $B \in E_{\alpha}^H(S)$.

b) Montrons que E_{α}^H est régulier. Supposons qu'il existe $S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \in \mathcal{P}_0(A)$ tels que $B \in E(S)$ et $A \setminus B \in E(N \setminus S)$. Alors, il existe

$R^S \in \mathcal{L}(A)^S$ tel que pour tout $Q^{N\setminus S}$, $H(R^S, Q^{N\setminus S}) \subset B$. De même, il existe $U^{N\setminus S} \in \mathcal{L}(A)^{N\setminus S}$ tel que pour tout $V^S \in \mathcal{L}(A)^S$, $H(V^S, U^{N\setminus S}) \subset A \setminus B$. En prenant $Q^{N\setminus S} := U^{N\setminus S}$, nous avons $H(R^S, U^{N\setminus S}) \subset B \cap (A \setminus B)$. Ce qui est contraire à la définition de H.

Comme $E_\kappa^H(S) \subset E_\alpha^H(S), \forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, alors E_κ^H est régulier.

c) Montrons que E_β^H est maximal. Supposons qu'il existe $S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \in \mathcal{P}_0(A)$ tels que $B \notin E_\beta^H(S)$ et $A \setminus B \notin E_\beta^H(N \setminus S)$. Alors, pour un $R^S \in \mathcal{L}(A)^S$, $H(R^S, Q^{N\setminus S}) \setminus B = \emptyset, \forall Q^{N\setminus S}$ et pour un $U^{N\setminus S} \in \mathcal{L}(A)^{N\setminus S}$, $H(V^S, U^{N\setminus S}) \cap B \neq \emptyset, \forall V^S \in \mathcal{L}(A)^S$. En prenant $Q^{N\setminus S} = U^{N\setminus S}$, nous avons $H(R^N, U^{N\setminus S}) \setminus B \neq \emptyset$ et $H(R^N, U^{N\setminus S}) \setminus [A \setminus B]B \neq \emptyset$, ce qui est impossible.

d) Si E_κ^H est maximal tandis que $E_\kappa^H(S) \subset E_\alpha^H(S), \forall S \in \mathcal{P}_0(A)$, alors E_α^H est maximal et $E_\beta^H(S) = E_\alpha^H(S), \forall S \in \mathcal{P}_0(A)$ (Cf Abdou & Keiding (3)). Soit alors $S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \in \mathcal{P}_0(A)$ tels que $B \notin E_\kappa^H(S)$. De la maximalité de E_κ^H, $A \setminus B \in E_\kappa^H(N \setminus S)$. De a),

$$A \setminus B \in E_\alpha^H(S), \tag{17}$$

et de b), E_α^H est régulier, alors $B \notin E_\alpha^H(S)$. Comme $E_\alpha^H(S) = E_\beta^H(S)$, nous avons :

$$B \notin E_\beta^H(S) \tag{18}$$

Ce qui montre que $E_\beta^H(S) \subset E_\kappa^H(S), \forall S \in \mathcal{P}_0(N)$.

□

4 Théorèmes principaux

Les théorèmes suivants donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une correspondance de choix social soit rationalisable au sens du coeur ou au sens du marchandage par une fonction d'effectivité. C'est-à-dire qu'il n'a y pas de contraste entre l'issue sociale sélectionnée par la règle associée à la correspondance de choix social et l'issue sociale issu du mécanisme de non opposition induit par la distribution des pouvoirs aux travers des coalitions.

Théorème 4.1. *Soit $H : \mathcal{L}(A)^N \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ une correspondance de choix social. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *H satisfait* l'antimonotonie, la paretienneté *et* la détermination*;*

(ii) *il existe une fonction d'effectivité E_κ^H telle que*

$$\forall R^N \in \mathcal{L}(A)^N : H(R^N) = \mathcal{C}(E_\kappa^H, R^N)$$

Preuve : (ii)$\Rightarrow$(i). Montrons que H satisfait les conditions de (i).

Pareto : S'il existe $y \in A$ tel que $y\ R^i\ x, \forall i \in N$, alors $(N, \{y\})$ est une objection contre x. Donc, $y \notin \mathcal{C}(E^H, R^N) = H(R^N)$.

Antimonotonie : Soient $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ et $y \in A$ tels que $y \notin \mathcal{C}(E^H_\kappa, R^N)$. Alors, il existe une paire (S, B) telle que $B\ R^S\ y$. Si $Q^N \in \mathcal{L}(A)^N$, obtenu à partir de R^N en améliorant la position de $x \neq y$, alors $B\ Q^N\ y$. Donc, $y \notin H^(Q^N)$.

Détermination : Soient $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ et $y \in A$ tels que $y \notin \mathcal{C}(E^H_\kappa, R^N)$. Donc, il existe une paire (S, B) telle que (S, B) soit une objection contre y dans R^N. Soit alors Q^N tel que $B\ Q^S\ Q^S\ [A \setminus (B \cup \{y\})]$, alors (S, B) est une objection contre y dans le profil $(Q^S, R^{N\setminus S})$. C'est à dire que $y \notin H(Q^S, R^{N\setminus S})$.

(i)$\Rightarrow$(ii). Comme H satisfait la condition de Pareto, alors E^H_κ est une fonction d'effectivité. Il nous reste à montrer que $H(R^N) = \mathcal{C}(E^H_\kappa, R^N)$. Soit $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ et $y \in A$ tels que $y \notin \mathcal{C}(E^H_\kappa, R^N)$. Par définition de E^H, κ, $y \notin H(Q^S, R^{N\setminus S})$ où $B\ Q^S\ [A \setminus (B \cup \{y\})]$. Sans nuire à la généralité, nous pouvons admettre que $R^N_{/B} = Q^N_{/B}$ et $R^N_{/[A\setminus(B\cup\{y\})]} = Q^N_{/[A\setminus(B\cup\{y\})]}$. Ce qui nous permet de déduire R^N à partir de Q^N par une amélioration successive des positions des $s \notin B$. De l'antimonotonie de H, nous obtenons $y \notin H(R)^N$. Réciproquement, $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ et $y \in A$ tels que $y \notin H(R^N)$, alors du principe de détermination, $B = \{x \mid x\ R^S\ y\} \in E^H_\kappa(S)$, ce qui montre que (S, B) est une objection contre y. Donc, $y \notin \mathcal{C}(E^H_\kappa, R^N)$.

□

Comme le montre les exemples 3.3 et 3.4, la correspondance de choix social associée à la règle de Condorcet satisfait à ces trois conditions alors que celui de Borda ne l'est pas. En effet,

Exemple 4.2. *La règle de Borda ne satisfait pas l'antimonotonie.*

Soient $N = \{1, \ldots, 4\}$, $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ et R^N le profil montré dans le tableau suivant

x_1	x_1	x_1	x_1
x_2	x_2	x_2	x_2
x_3	x_3	x_3	x_3
R^1	R^2	R^3	R^4

Donc $x_2 \notin H_B(R^N)$. Par contre, si $Q^N \in R^N(x_3)$ est le profil dans le tableau suivant

x_1	x_3	x_1	x_3
x_2	x_2	x_2	x_2
x_3	x_1	x_3	x_1
Q^1	Q^2	Q^3	Q^4,

alors

$$b(x_1, Q^N) = b(x_2, Q^N) = b(x_3, Q^N) = 0$$

Cet exemple montre également la différence entre la monotonie et l'anti-monotonie. La règle de Borda satisfait la monotonie au sens de Maskin.

Théorème 4.3. *Soit $H : \mathcal{L}(A)^N \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ une correspondance de choix social telle que $H(R^N) = \mathcal{M}(E^H_\kappa, R^N)$. Alors, H satisfait la condition de Pareto et la détermination.*

Preuve : La condition de Pareto fait partie de la définition du marchandage de Mas-Colell. Donc, il suffit de montrer que H satisfait la détermination.

Par l'absurde. Soient $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ et $y \notin \mathcal{B}_m(E, R^N)$. Soient (S, B) une objection justifiée selon Mas-Colell contre y et $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ tels que $B \in E^\star(S, R^N)$. Pour simplification, notons u^N la fonction d'utilité associée à R^N et v^N la fonction d'utilité associée à Q^N. Alors :

$$v^S(B) > v^S(y) > \max_{x \in B \cup \{y\}} v^S(x) \tag{19}$$

Donc, $B \in E^\star(S, v^S, u^{N \setminus S})$ et (S, B) est une objection contre y dans u^N. Si $y \in \mathcal{B}_m(E, v^S, u^{N \setminus S})$, alors il existe une paire (T, C) telle que $C \in E(T)$ et

$$\big(v^{S \cap T}(C), u^{T \setminus S}(C)\big) > \big(v^{S \cap T}(B), u^{T \setminus S}(y)\big) \tag{20}$$

Si $S \cap T = \emptyset$, l'équation 20 devient

$$u^T(C) > u^T(y)$$

Donc, (S, B) admet une contre objection dans u^N. Ce qui est contraire au choix de (S, B). Si $S \cap T \neq \emptyset$, nous avons en particulier :

$$\forall i \in S \cap T,\ v^i(C) > v^i(B) > v^i(A \setminus (B \cup \{y\}))$$

Ce qui entraîne que $C \cap [A \setminus (B \cup \{y\})] = \emptyset$, i.e

$$C \subset B$$

Par conséquent :

$$u^S(C) \geq u^S(B) \tag{21}$$

De l'équation 20, $u^{T \setminus S}(C) > u^{T \setminus S}(y)$, alors de l'équation 21,

$$u^T(C) > \big(v^{S \cap T}(B), u^{T \setminus S}(y)\big) \tag{22}$$

C'est-à-dire que (S, B) admet une contre objection dans u^N, ce qui contredit le choix de (S, B). D'où

$$y \notin \mathcal{B}_m(E, v^S, u^{N \setminus S})$$

□

Nous tenons à remarquer que la correspondance ce choix social $\mathcal{M}(E,)$ n'est ni monotone ni anti-monotone. En effet, considérons l'exemple **??** (Chapitre 4). Dans le profil $v^N = u^N$ sauf d est au top alternative pour le joueur 8, nous avons $d \notin \mathcal{M}(E, v^N)$.

5 Discussion : Consistance d'une correspondance de choix social

Le nombre de réponses et de choix possibles dans un vote peut ne pas être égal au nombre des alternatives. Le vote à deux tours où les joueurs n'ont le choix qu'*approuver* ou *désapprouver* les candidats en sont des exemples. Donc, dans cette discussion, nous reprenons le cas général où $|Y| \leq m$. Donc, si u^i est la fonction d'utilité associée à la préférence de i, alors $u^i(y)$ correspond à la note attribuée par i de $x \in A$. Comme auparavant, pour une correspondance de choix social H, on peut associer au moins trois mode de distribution de pouvoir E_α^H, E_β^H, E_κ^H. De la proposition 3.5

$$\forall S \in \mathcal{P}_0(N) : E_\alpha^H(S) \subset E_\alpha^H(S) \subset E_\beta^H(S),$$

alors les joueurs ont intérêt à jouer selon β, ce qui leur offre un pouvoir maximal. Dans ce cas, comme le montre l'exemple 3.4, même pour une règle aussi consistante que celle de borda, il est possible qu'une famille de coalitions puisse bloquer toutes les issues sociales dans E_β. En effet, admettons qu'il y a $2n$ joueurs dans l'exemple 3.4, alors une coalition de n joueurs a le pouvoir de bloquer n'importe quelle alternative. Dans ce cas, si pour deux coalitions disjointes S_1 et S_2 et deux ensembles d'alternatives disjoints B_1 et B_2 tels que les éléments de B_1 sont préférés à ceux de B_2 par tous les membres de S_1, et les éléments de B_2 sont préférés à ceux de B_1 par tous les membres de S_2, alors aucune alternative est sans objection. Pourtant, si H désigne la correspondance de choix social associé à la règle de Borda, alors $H(R^N) \neq \emptyset, \forall R^N \in \mathcal{L}(A, Y)$. Par conséquent, il existe au moins une préférence $R^N \in \mathcal{L}(A, Y)$ telle que $x \in H(R^N)$ soit contesté par au moins une coalition $S, |S| \geq n$, i.e $x \notin \mathcal{C}(E^H\beta, R^N)$. Donc, H est contesté dans R^N, et le nombre de couple (x, R^N) tel que $x \in H(R^N)$ alors que $x \notin \mathcal{C}(E_\beta^H, R^N)$ donne une indication sur la fréquence de contestation des issues de H.

Soit alors

$$\begin{cases} \tau(H, x, R^N) = & 1 \text{ si } x \in H(R^N) \text{ et } x \text{ soit opposable dans } R^N \ ; \\ & 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Alors

Indice de contestation. *L'indice de contestation de la correspondance de choix social H est donné par le nombre*

$$\tau(H) = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{|\mathcal{L}(A,Y)|}\right)^n \sum_{(x,R^N)\in A\times\mathcal{L}(A)^N} \tau(H,x,R^N) \tag{23}$$

Proposition 5.1. *Pour tout $H : \mathcal{L}(A,Y)^N \longrightarrow \mathcal{P}_0(A)$, nous avons :*

$$0 \leq \tau(H) \leq 1$$

Pour illustration, considérons $N = \{c_1, c_2, c_3\} = A$ et H_1 et H_2 les deux modes de scrutin suivant

Scrutin H^1. *Vote par approbation.*

L'ensemble de notes $Y = \{0,1\}$, et le candidat $c \in A$ est dans $H(u^N)$ si pour aucun $c' \in A$, $\sum_{i\in N} u^i(c) < \sum_{i\in N} u^i(c')$. Dans ce cas, une coalition S a le pouvoir d'opposer au candidat $c \in A$ si à chaque fois que $N \setminus S$ est dans le profil $u^{N\setminus S}$ tel que $\forall i \in N\setminus S,\ u^i(c) > u^i(c')$, il existe un $S-$profil u^S tel que $c \notin H(u^N)$. Il n'est pas difficile de voir que

$$E^{H_1}(\{c_k\}) = \{A\} \text{ et } \forall s \geq 2,\ E^{H_1}(S) = \{B \subset N \mid B \neq \emptyset\} = \mathcal{P}_0(A)$$

$$\tau(H^1) = 0$$

Scrutin H^2. *Vote par évaluation.*

L'ensemble de notes $Y = \{-1,0,1\}$, et le candidat $c \in A$ est dans $H(u^N)$ si pour aucun $c' \in A$, $P(c) = \sum_{i\in N} u^i(c) < \sum_{i\in N} u^i(c') = P(c')$. Par un raisonnement analogue, on peut montrer que

$$\forall S \in \mathcal{P}_0(N) :\ E^{H_1}(S) = E^{H_2}(S)$$

Soit u^N le profil défini dans le tableau suivant

+1	c_1	c_2	c_2
0	c_3	c_1	c_1
- 1	c_2	c_3	c_3
Note	u^{c_1}	u^{c_2}	u^{c_3}

Alors, les points des candidats $c_1,\ c_2,\ c_3$ sont

$$P(c_1) = 1,\quad P(c_2) = 1,\quad P(c_3) = -1 \text{ et}$$

Donc

$$H(u^N) = \{c_1, c_2\}$$

On remarque que pour tout u^N, $H(u^N) \neq \emptyset$, donc en particulier, l'indice de contestation est égal au nombre de paradoxe de Condorcet de E^{H_2}. Pour le calcul de la fréquence de la vacuité du coeur d'une fonction d'effectivité, une généralisation du calcul de la fréquence du paradoxe de Condorcet, voir (**?**). Par conséquent :

$$\tau(H^2) = \frac{3!3!}{3!^3} = \frac{1}{6}$$

Pour finir, admettons que R^N soit une bijection entre A et $\{1, \ldots, m\}$. Disons que x est dit $q-$dominé par y dans R^N si $\{i \mid y\ R^i\ x\} \geq q$.

Proposition 5.2. *Soit H_q la correspondance de choix social définie par $H_q(R^N) = \left\{x \mid x \text{ n'est pas } \ q - \text{dominé dans } R^N\right\}$. Alors :*

$$\tau(H_q) = 0$$

Preuve. Comme dans l'exemple 3.3, on peut montrer que

$$E_\alpha^{H_q} = E_\beta^{H_q} = E_\kappa^{H_q}$$

Du théorème 4.1, pour monter que $H_q(R^N) = \mathcal{C}(E_\beta^{H_q}, R^N)$, il suffit de montrer que H_q satisfait la paretienneté, l'antimonotonie et et la détermination.

Pareto. Si $x\ R^i\ y, \forall i \in N$, alors $\#\{i \mid x\ R^i\ y\} \geq q$. Donc, $y \notin H(R^N)$.

Antimonotonie. Soient $y \notin H_q(R^N)$ et $Q^N \in R^N(x), x \neq y$. Alors, il existe $z \neq y$ tel que $\#\{i \mid z\ R^i y\} \geq q$. Si $z = x$, alors $\#\{i \mid x\ R^i\ y\} \leq \#\{i \mid x\ Q^i\ y\}$. Donc, $y \notin H_q(Q^N)$. Si $z \neq x$, alors les restrictions de R^N et de Q^N sur $A \setminus \{x\}$ sont les mêmes. Donc, $\#\{i \mid x\ R^i\ y\} = \#\{i \mid x\ Q^i\ y\}$, i.e. $y \notin H_q(Q^N)$.

Détermination. Si $S = \{i \mid x\ R^i\ y\}$ tel que $|S| \geq q$, et si R^N est un profil tel que $x\ R^S\ y\ R^S[A \setminus (x, y)]$, alors $y \notin H_q(R^N)$.

□

6 conclusion

Une correspondance de choix social est un moyen de simplification de la gestion des pouvoirs et de la prise de décision. Si tous les joueurs respectent les limites de leurs pouvoirs selon la règle donnée, alors l'indice de consistence basé sur la rationalisation peut bien mesurer le contraste entre le pouvoir réel et le pouvoir formel. Pourtant, la question de rationalisation dépasse largement le cadre du choix social et les joueurs peuvent jouir d'une autre source de pouvoir, différente de la convention dictée par la règle du choix social. Dans ce cas, le problème de consistence ouvre d'autres dimensions du problème de la gouvernance. Tel en est l'objectif de chapitre suivant, qui aborde de manière systématique la question de la rationalisation et de de gouvernance.

Références

[1] Abdou J. (1982), "Stabilité de la fonction veto, cas du veto maximal", Mathématiques et Sciences Humaines 80, p 39-65.

[2] Abdou, J. (2008), "A Stability Index for Local Effectivity Functions", Ongoing paper.

[3] Abdou, J. et H. Keiding (1991), "Effectivity Functions in Social Choice", Dordrecht : Kluwer Academic press. 5, 13

[4] Aghion P. et J. Tirole (1997), "Formal and Real Authority in Organisation", Journal of Political Economy, 105, 1-29. 7

[5] Baujard, A. and H. Igersheim (2009), "Expérimentation du vote par note et du vote par approbation le 22 avril 2007. Premiers résultats", Revue Economique, Vol.60, n°1, Janvier.

[6] Baujard, A., T. Senné, and H. Igersheim (2009), "An analysis of the French political supply. An analysis based on experimental data", Document de travail CREM.

[7] Banzhaf J.F (1965), "Weighted voting doesn't work : A mathematical analysis", Rutgers Law Review 19 N° 2, p 317 - 343.

[8] Danilov V. and Alexander I. S. (2002), "Social Choice Mechanism", Springer.

[9] Hans Keiding (1985), "Necessary and sufficient conditions for stability of effectivity functions", International Journal of Game Theory, 14 N°2.

[10] Hans Keiding and Razafimahatolotra D. (2008), "Core rationalization of the social choice correspondance", papier en cours.

[11] Moulin H. (1994), " The Strategy of Social Choice", Advanced Textbooks in Economics, 18.

[12] Nakamura K. (1979), " The vetoers in a simple game with ordinal preferences", International Journal of Game Theory, 8 : 55-61.

[13] Picavet, E. (2008), "Talos ou la matrice libéral". Document inclut dans l'Habilitation de Recherche (HDR).

[14] Picavet, E. (1998), "Rights and Powers : Reflections on Bezalel Peleg's Theory of Effectivity Functions, Game Forms, Games and Rights", in : Laslier, J.-F., Fleurbaey, M., Gravel, N. et Trannoy, A., Freedom in Economics - New Perspectives in Normative Analysis, Londres, Routlege.

[15] Picavet E. & Razafimahatolotra D. (2007), "Sur la formalisation de la pluralité des interprétations en matière normative", Publication of the "Deuxième Congrès de la Société de Philosophie des sciences". 7

[16] Picavet E. & Razafimahatolotra D. (2008), "Analysing Plural Normative Interpretations in Social Interactions". Publication de l'Université d'Etat de Saint Petersbourg.

[17] Tchantcho, B. and L.D.Lambo (2008), "A characterization of social choice correspondences that implement the core of simple games", to appear in : Economic Theory.

[18] Van Deemen (1997), "Coalition formation and Social choice", Kluwer academic publishers.